

پایداری کوانتومی غیرآشوبی کرمچاله‌های لورنتزی

ابوالفضل فریدونی

دانشجوی کارشناسی مهندسی برق، دانشکده مهندسی برق و علوم پایه، دانشگاه صنعتی اراک - ایران

چکیده

معمای دیرپای کرمچاله‌های گذرپذیر لورنتزی در نیاز آن‌ها به نقض موضعی شرط انرژی پوچ (NEC) ریشه دارد. هرچند نوسانات خلاء در نظریه میدان کوانتومی می‌توانند چنین نقض‌هایی را ایجاد کنند، قیده‌های قدرتمند ناشی از نابرابری‌های انرژی کوانتومی (QEIs) در عمل، چشم‌انداز تحقق کرمچاله‌های با ابعاد ماکروسکوپی را به چالشی عمیق تبدیل کرده است. در این مقاله، ما با اتخاذ یک رویکرد رادیکال، مرز بین هندسه و ماده کوانتومی را محو می‌کنیم. برای این کار، یک فرمالیسم یکپارچه فاز-فضا ارائه می‌دهیم که در آن، نوسانات متریک و میدان‌های کوانتومی نه به عنوان موجوداتی مجزا، بلکه به عنوان متغیرهای مزدوج بر روی یک منی‌فولد ساده‌تیک گسترده تعریف می‌شوند. این اتحاد، خودبه‌خود به یک دسته از معادلات عملگری غیرخطی و خودسازگار می‌انجامد که پس‌کنش کامل کوانتومی را به صورتی غیرآشوبی در خود جای می‌دهند. ما این معادلات را با توسل به یک طرح عددی سنگین متکی بر گسسته‌سازی تفاضل محدود روی شبکه‌های سازگار شونده و تقویت‌شده با الگوریتم‌های کاهش خطای کوانتومی حل کرده‌ایم. محاسبات ما به وضوح آشکار می‌سازد که حالت‌های فشرده شده همدوس، قادر به تولید یک شار انرژی منفی پایدار و خودنگهدار در ناحیه گلوگاه هستند. مقدار انتظاری محاسبه شده برای چگالی انرژی، در محدوده برای گلوگاه با شعاع قرار می‌گیرد. این شار برای پایداری کرمچاله‌هایی با حداقل شعاع گلوگاه (در مقیاس میکروسکوپی) کافی است. این نتیجه، مستقیماً محدودیت‌های سختگیرانه ناشی از QEI های مرتبه پایین را دور می‌زند و در عین حال، راه‌حلی انقلابی مبتنی بر «مهندسی حالت کوانتومی» برای معمای پایداری ارائه می‌دهد — راه‌حلی که مستقل از هرگونه ماده غریب کلاسیک است.

واژگان کلیدی: کرمچاله لورنتزی گذرپذیر، فاز-فضای هندسی-کوانتومی، مهندسی حالت کوانتومی، شار انرژی منفی پایدار، محاسبات عددی غیرآشوبی

مقدمه

آرزوی دیرین برای پیمودن کیهان در زمانی کوتاه، فیزیک نظری را همواره به سوی مفهوم کرم‌چاله‌های گذرپذیر کشانده است. این پل‌های فرضی در ساختار فضا-زمان، نه تنها می‌توانند آرمان سفرهای بین‌ستاره‌ای را محقق کنند، بلکه آزمایشگاهی منحصربه‌فرد برای آزمودن مرزهای نسبیت عام و مکانیک کوانتوم هستند. کار پیشگامانه موریس و ثورن [۱] نشان داد که ساختار پایدار چنین کرم‌چاله‌هایی مستلزم نقض یکی از پایه‌ای‌ترین مفروضات نسبیت عام، یعنی شرط انرژی پوچ (NEC) است. در نتیجه، کرم‌چاله به ماده‌ای «غریب» با چگالی انرژی منفی نیاز دارد که در قلمرو فیزیک کلاسیک ناشناخته است.

طبیعی است که راه حل این معضل به قلمرو مکانیک کوانتومی واگذار شود. نوسانات خلاء کوانتومی همان‌گونه که در اثر کاسیمیر مشهود است این توانایی ذاتی را دارند که موضعاً چگالی انرژی منفی تولید کنند. بنابراین، امید می‌رفت که اثرات کوانتومی بتواند سنگ بنای پایداری کرم‌چاله را فراهم آورد. اما این امید به زودی با کشف محدودیت‌های سختگیرانه‌ای موسوم به «نابرابری‌های انرژی کوانتومی (QEIS)» تعدیل شد. تحقیقات نظری نشان داده است که این قوانین، مقدار و مدت زمان انرژی منفی قابل استخراج از حالت‌های خلاء یا حالت‌های کوانتومی ساده را به شدت محدود می‌کنند [۲، ۳]. به نظر می‌رسید این محدودیت‌ها، رویای ساخت کرم‌چاله‌های گذرپذیر و پایدار با ابعاد ماکروسکوپی را برای همیشه به تعلیق درآورده است.

تلاش‌های هوشمندانه‌ای برای گریز از این بن‌بست نظری صورت گرفته است. رویکردهایی مبتنی بر حالت‌های درهم‌تنیده فرمیونی [۴] یا استفاده از تئوری‌های میدان مؤثر اصلاح‌شده با اثرات کوانتومی (مانند نظریه اینشتین-اولر-هایزنبرگ) [۵] از آن جمله‌اند. همچنین، برخی پژوهش‌ها با بهره‌گیری از مفاهیم نظریه ریسمان مانند T -دوگانی سعی در القای یک مقیاس طول بنیادی و بازبه‌هنجار کردن گرانش در مقیاس‌های پلانکی داشته‌اند که می‌تواند به جواب‌های کرم‌چاله‌ی عاری از تکینگی منجر شود [۶]. با این حال، اغلب این رویکردها از یک نقطه ضعف مشترک رنج می‌برند: یا پس‌کنش کامل کوانتومی هندسه را به صورت خودسازگار در نظر نمی‌گیرند، یا از لاگرانژی‌های ماده‌ای خاص و غیراستاندارد استفاده می‌کنند. خلأ یک رویکرد غیرآشوبی و خودسازگار که هندسه و میدان کوانتومی را به طور کامل و پویا با هم درآمیزد، همچنان مشهود است.

در این مقاله، ما یک پارادایم یکپارچه‌گرا را معرفی می‌کنیم: چارچوب فاز-فضای هندسی-کوانتومی. هسته مرکزی این ایده، کنار گذاشتن نگرش متعارف «ماده در یک زمینه» است. در عوض، ما نوسانات کوانتومی متریک (h_{ij}, π^{ij}) و میدان‌های ماده (ϕ, π_ϕ) را به یکسان‌سازی و تعریف می‌کنیم به عنوان متغیرهای مزدوج بر روی یک منیفولد ساده‌تیک گسترده. این نگاه، مسیر را برای استخراج معادلات تکامل عملگری خودسازگار و غیرآشوبی هموار می‌سازد؛ معادلاتی که در آن، هندسه و ماده کوانتومی نه به ترتیب، بلکه در یک رقص پویا و متقابل یکدیگر را شکل می‌دهند و پس‌کنش کامل محاسبه می‌شود. پس از تشریح ریاضیاتی این فرمالیسم، با یک حمله عددی سنگین مبتنی بر شبکه‌های سازگار شونده و الگوریتم‌های کاهش خطا توانایی ذاتی این چارچوب را در پایدارسازی کرم‌چاله‌هایی با گلوگاهی در مقیاس غیرپلانکی

نشان خواهیم داد. این نتیجه نه تنها محدودیت‌های سنتی QEIها را دور می‌زند، بلکه راه‌حلی مبتنی بر اصول اولیه و مهندسی حالت‌های کوانتومی فعال ارائه می‌دهد.

تاریخ تحلیلی یک بن‌بست: از ماده غریب تا مهندسی کوانتومی

بنیان زیبای کرم‌چاله‌های گذرپذیر لورنتزی بر یک تناقض ظریف استوار شد: نیاز به ماده‌ای که بنیادی‌ترین اصل پویاشناسی نسبت عام شرط انرژی پوچ (NEC) را نقض کند. این «ماده غریب»، نه یک کشف، که یک اعتراف نظری به ناتوانی فیزیک کلاسیک بود. پاسخ جامعه نظری به این اعتراف، سه پارادایم متمایز را شکل داد که هر یک، در نهایت، به دیوارهای مفهومی متفاوتی برخوردند.

نخستین واکنش، جستجوی جواب‌های دقیق با منابع ماده‌ای از پیش غریب بود. میدان‌های اسکالر شبه-شبح (phantom) یا چگالی‌های انرژی منفی ad-hoc نمونه‌هایی از این دست بودند. اشکال اساسی این رویکرد، دور باطل منطقی آن بود: این مدل‌ها پاسخی به پرسش «چگونه انرژی منفی تولید می‌شود؟» ندادند، بلکه آن را به عنوان پیش‌فرض مسئله قبول کردند. بنابراین، ناپایداری دینامیکی این جواب‌ها [۱] تنها یک عارضه سطحی نبود؛ بلکه نشانه‌ای از یک بیماری معرفت‌شناختی در بنیان آن‌ها بود. این پارادایم، به جای حل معمای کرم‌چاله، صرفاً آن را در لباسی ریاضیاتی بازتولید کرد.

راهبرد دوم، تعدیل خود معادلات اینشتین در نظریه‌هایی مانند $f(R)$ یا گرانش گاوس-بنه بود. در اینجا، جمله‌های هندسی پیچیده‌تر می‌توانستند به عنوان یک «تنش-انرژی مؤثر» رفتار کنند و نیاز صریح به ماده غریب در سمت راست معادلات را کاهش دهند. با این حال، نقد جدی به این استراتژی وارد است: در بسیاری از موارد، این تنش-انرژی مؤثر هندسی، خود، همان ویژگی‌های غریب (مانند نقض NEC) را داشت [۲]. بنابراین، این پارادایم نیز مسئله را حل نکرد، بلکه آن را به شکلی پیچیده‌تر از بخش ماده به بخش معادلات میدان منتقل کرد. افزون بر این، تقریباً تمام این مدل‌ها، پس‌کنش پویای میدان‌های کوانتومی بر این هندسه اصلاح‌شده را نادیده می‌گرفتند.

سومین و امیدوارکننده‌ترین واکنش، بهره‌گیری هوشمندانه از ذخیره انرژی منفی ذاتی در نوسانات خلاء کوانتومی بود. اثر کاسیمیر یا حالت‌های فشرده‌شده همدوس، نمونه‌های کلاسیک این ذخیره هستند. اما قضیه‌های قدرتمند نابرابری انرژی کوانتومی (QEI) [۳] نشان دادند که مکانیک کوانتوم نیز اجازه تولید نامحدود انرژی منفی را نمی‌دهد. این نابرابری‌ها، نگرهبانان علیت در مقیاس خرد هستند و برای جلوگیری از پارادوکس‌هایی مانند ارتباطات فراتر از نور (superluminal signaling) ضروری‌اند. QEIها سقف سختی بر مقدار و مدت انرژی منفی قابل استخراج از یک ناحیه محدود تحمیل می‌کنند. کاربرد این قضایا بر هندسه کرم‌چاله، نتیجه سرسام‌آوری داشت: یا گلوگاه باید در مقیاس پلانک باقی بماند، یا لایه انرژی منفی به ضخامتی غیرواقعی (معمولاً کسری از طول پلانک) محدود شود [۴]. حتی راهبردهای مبتکرانه‌ای مانند استفاده از فرمیون‌های درهم‌تنیده در زمینه سیاهچاله‌های تقریباً افراطی [۵]، اگرچه از نظر اصولی

گذرپذیری را ممکن ساختند، اما به پیکربندی‌هایی بسیار خاص و متقارن گره خوردند و مکانیسمی کلی برای پایداری درازمدت و فعال یک کرم‌چاله دلخواه ارائه نکردند.

این تاریخ تحلیلی نشان می‌دهد که شکست سه پارادایم فوق، تصادفی نبوده است. ریشه این شکست در دوگانگی ساختاری بین هندسه (کلاسیک، قطعی) و ماده (کوانتومی، احتمالاتی) نهفته است که در قلب فیزیک امروز جای دارد. تا زمانی که هندسه تنها به عنوان یک صحنه ثابت برای نمایش کوانتومی عمل کند، یا برعکس، اثرات کوانتومی تنها به عنوان یک اختلال کوچک بر یک زمینه از پیش تعیین شده در نظر گرفته شوند، مسئله پایداری کرم‌چاله راه‌حل بنیادینی نخواهد یافت. آنچه نیاز است، یک چارچوب یکپارچه است که سه شرط را همزمان برآورده کند:

۱. ارائه یک زبان هندسی-جبری مشترک که متغیرهای متریک و میدان کوانتومی را از ابتدا هم‌تراز کند.

۲. استخراج معادلات تکامل از یک اصل واریاسیونی واحد، نه دو اصل جداگانه برای گرانش و ماده.

۳. ارائه یک روش حل غیرآشوبی که بتواند پویایی کامل این سیستم یکپارچه را، بدون اتکا به تقریب‌های شک‌برانگیز، آشکار سازد.

فرمالیسم فاز-فضای هندسی-کوانتومی

اصل هم‌ارزی اینشتین حکم می‌کند که آثار گرانشی و اینرسی موضعاً غیرقابل تشخیص هستند. در یک نظریه یکپارچه، این اصل باید به برهم‌کنش پویای نوسانات کوانتومی با هندسه پس‌زمینه تعمیم یابد. این امر مستلزم تعریف یک فضای فاز واحد $\tilde{\Gamma}$ است که متغیرهای توصیف‌کننده هندسه و حالت کوانتومی را به طور متقارن در خود جای دهد. متغیرهای بنیادی ما عبارتند از: متریک سه‌بعدی $h_{ij}(x)$ ، مومنوم مزدوج گرانشی $\pi^{ij}(x)$ ، عملگر میدان کوانتومی $\hat{\phi}(x)$ و مومنوم مزدوج کوانتومی $\hat{\pi}_\phi(x)$.

قلب فرمالیسم ما در تعریف یک **۲ فرم ساده تیک تعمیم‌یافته** Ω نهفته است که جفت‌شدگی بنیادی بین دو بخش را کدگذاری می‌کند.

قضیه ۱ (ساختار ساده‌تیک غیرخطی): عمومی‌ترین شکل نوردای موضعی، خطی و پادمتقارن برای ۲-فرم ساده‌تیک یک سیستم بسته گرانش-ماده، تا مرتبه اول در یک ثابت جفت‌شدگی بنیادی η ، به صورت زیر است:

$$\Omega = \int_{\Sigma} d^3x \left(\delta h_{ij} \wedge \delta \pi^{ij} + \delta \hat{\phi} \wedge \delta \hat{\pi}_\phi \right) + \eta \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{|h|} C^{ijkl} [h] \delta R_{ij} [h] \wedge \delta Q_{kl} + O(\eta^2) \quad (1)$$

که در آن C^{ijkl} یک تانسور هم‌وردای ساخته‌شده از متریک h_{ij} است و \hat{Q}_{kl} یک ناوردای عملگری مرتبه‌دوم (مانند جزءی از تانسور تنشی-انرژی بازیه‌هنجارشده $\langle T_{kl} \rangle$) می‌باشد.

برهان: شرط ناوردایی موضعی و خطی بودن در تغییرات متغیرها، شکل کلی

$$\Omega = \int_{\Sigma} \Theta_A \wedge \delta \Theta^A$$

را ایجاب می‌کند، که در آن Θ^A مجموعه‌ای از ۱ فرم‌های پایه روی $\hat{\Gamma}$ هستند. جمله اول، ساختار ساده‌تیک استاندارد و بدون برهم‌کنش را نشان می‌دهد. برای ساختن جمله برهم‌کنش، باید اشیایی را انتخاب کنیم که هم‌وردا بوده و تغییرات آنها اطلاعات فیزیکی مستقل را حمل کند. ساده‌ترین شیء هندسی غیربدیهی که مشتق دوم متریک را دربرمی‌گیرد، تانسور ریچی $R_{ij}[h]$ است. در طرف کوانتومی، ساده‌ترین شیء عملگری معنادار فیزیکی که به زمینه پاسخ می‌دهد، واریش تانسور تنشی-انرژی

$$\delta \hat{Q}_{kl} \sim \delta \langle \hat{T}_{kl} \rangle / \delta h_{ij} \delta \hat{Q}_{kl}$$

است. ترکیب پادمقارن (ضرب گوه) تغییرات این دو شیء، تنها شکل ممکن برای جمله برهم‌کنش خطی و ناوردا است. انتخاب خاص $(h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk} - 2h^{ij}h^{kl})$ و $C_{ijkl} = \frac{1}{4} \langle \hat{T}_{kl} \rangle_{ren}$ منجر به صورتی می‌شود که در محاسبات بعدی از آن استفاده خواهیم کرد.

نتیجه‌گیری این بخش بدین شرح است که جمله تصحیح η در معادله ۱ یک جفت‌شدگی مشتق‌گونه غیرخطی بین انحنا-فضا-زمان و نوسانات کوانتومی معرفی می‌کند. این جفت‌شدگی، بنیان ریاضیاتی برای یک پس‌کنش کوانتومی کامل و غیرآشوبی را فراهم می‌سازد.

با در دست داشتن Ω ، روابط جابجایی بنیادی (کانونیکال) از وارون کردن ماتریس ساده‌تیک $\omega \delta_{AB}(x, y) = \delta^y \Omega / (\delta \zeta^A(x) \delta \zeta^B(y))$ به دست می‌آیند، که در آن $\zeta_A = (h_{ij}, \pi^{ij}, \hat{\phi}, \hat{\pi}_{\phi})$ ، یک محاسبه مستقیم تا مرتبه اول η نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} [\hat{h}_{ij}(x), \hat{\pi}^{kl}(y)] &= i\hbar \delta_i^k \delta_j^l \delta^{(r)}(x-y) + i\hbar \eta D_{ij}^{kl} [h(x)] \delta^{(r)}(x-y) + O(\eta^2), [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}_{\phi}(y)] \\ &= i\hbar \delta^{(r)}(x-y) + O(\eta^2) \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه فوق، D_{ij}^{kl} یک عملگر دیفرانسیلی-هندسی مرتبه دوم است که از واریاسیون جمله $\delta R \wedge$ در Ω مشتق می‌شود. رابطه (۲) به وضوح نشان می‌دهد که هندسه فاز-فضای سیستم برهم‌کنش‌کننده، حتی در سطح بنیادی، غیرحیطی (Non-commutative) است. این یک ظهور (emergence) کلاسیک نیست، بلکه یک ویژگی ذاتی نظریه یکپارچه است.

اصل کنش باید بازتاب‌دهنده این یکپارچگی در سطح بنیادی باشد. ما کنش را به عنوان یک ریزه (Functional) روی جبر C^* عملگرها در نظر می‌گیریم:

$$\hat{S}[\hat{g}, \hat{\phi}] = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \otimes_A \left(\hat{R}(\hat{g}) \hat{\Delta} \hat{L}_m(\hat{\phi}, \hat{\nabla} \hat{\phi}) \right), \quad (3)$$

که در آن \otimes_A یک محصول تانسوری روی یک جبر غیرحیطی A (مانند جبر اشد کار) و $*$ یک محصول ستاره‌ای (Star-product) است که غیرحیطی بودن عملگرها را رمزگذاری می‌کند. برای اهداف عملی و عددی، این کنش عملگری را از طریق یک نگاشت ویل (Weyl map) به یک کنش مؤثر روی میدان‌های کلاسیک (ولی با تصحیحات غیرحیطی) فروگاهی می‌کنیم. این نگاشت، اثر حاصلضرب ستاره‌ای را به یک سری بینهایت از مشتقات تبدیل می‌کند:

$$S_{eff}[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R(g)}{16\pi G} + L_m(\phi, \nabla \phi) \right] + \eta \int d^4x \sqrt{-g} K^{\mu\nu\rho\sigma}(g) R_{\mu\nu\rho\sigma}(g) \mathcal{W}(\phi) + \dots \quad (4)$$

در اینجا، $K^{\mu\nu\rho\sigma}$ یک تانسور هم‌وردا و $W(\phi)$ یک ناوردای وزندار (weighted invariant) ساخته شده از میدان ϕ و مشتقاتش (مانند ϕ^{α} یا $(\nabla \phi)^{\alpha}$) پس از بازبه‌هنجاری) است. جمله η در (۴)، کوپل مستقیم و غیرحیطی بین تانسور ریمان و چگالی نوسانات کوانتومی را نمایان می‌سازد.

معادلات ساختاری نوین

معادلات حرکت با اعمال اصل کمترین کنش $\delta \hat{S} = 0$ نسبت به عملگرهای بنیادی $\hat{g}_{\mu\nu}$ و $\hat{\phi}$ به دست می‌آیند. پیچیدگی اصلی، واریاسیون عباراتی مانند $\sqrt{-g} \hat{R}(\hat{g})$ در فضای عملگرهای غیرحیطی است.

برهان (اشتقاق معادلات میدان عملگری):

۱. واریاسیون کنش مؤثر (۴) نسبت به متریک پس زمینه $\hat{g}_{\mu\nu}$ با احتساب وابستگی تمامی جمله‌ها به آن، انجام می‌شود:

$$\delta S_{eff} = \int d^4x \left[\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g_{\mu\nu}} + \eta \frac{\delta(\sqrt{-g}KRW)}{\delta g_{\mu\nu}} \right] \delta g_{\mu\nu}$$

۲. با استفاده از قضایای استاندارد نسبیت عام، می‌دانیم:

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \left(G^{\mu\nu} + (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square) \right)$$

جمله درون پرانتز، به صورت عملگری در نظر گرفته می‌شود.

۳. جمله ماده، تعریف کلاسیک تانسور تنشی-انرژی را نتیجه می‌دهد:

$$T_{class}^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g_{\mu\nu}}$$

در نظریه ما، این تانسور به میدان ϕ وابسته است که خود یک عملگر است، بنابراین $\hat{T}^{\mu\nu}$ حاصل می‌شود.

۴. واریاسیون جمله تصحیح η ، یک تانسور پیچیده $H^{\mu\nu}$ تولید می‌کند که ترکیبی از مشتقات $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ، $K^{\mu\nu\rho\sigma}$ و $W(\phi)$ است.

۵. با جمع‌بندی و صفر قرار دادن کل عبارت برای هر $\delta g_{\mu\nu}$ ، به معادله میدان عملگری تعمیم یافته می‌رسیم:

$$\hat{G}^{\mu\nu}(\hat{g}) + \eta \hat{H}^{\mu\nu}[\hat{g}, W(\hat{\phi})] = \wedge \pi G \hat{T}^{\mu\nu}(\hat{\phi}, \hat{g}) \quad (5)$$

این معادله یک برابری در سطح عملگرهاست و پیش از هرگونه گرفتن مقدار انتظاری برقرار است.

حالت فیزیکی سیستم یکپارچه ما، یک حالت مرکب $|\Xi\rangle$ در فضای هیلبرت کل است. دینامیک این حالت از فرمول بندی مسیر انتگرالی برای کنش (۴) استخراج می‌شود.

برهان (معادله شبه-شرویدینگر برای حالت مرکب):

تابع موج فاینمن $\Psi[\Sigma_f]$ که دامنه انتقال از یک سطح اولیه Σ_i به سطح نهایی Σ_f را می‌دهد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Psi[h_f, \phi_f, \Sigma_f] = \int_C D[g] D[\phi] e^{iS_{eff}[g, \phi]/\hbar} \Psi_{in}[h_i, \phi_i, \Sigma_i],$$

که انتگرال بر روی تمام رده‌های (Classes) هندسه‌ها و میدان‌هایی است که شرایط مرزی را ارضا می‌کنند. با شکافتن فاصله زمانی به بازه‌های کوچک Δt و استفاده از فرمول ترویج $K \sim e^{i\hat{H}\Delta t/\hbar}$ و با پیروی از روال استاندارد کوانتس کانونیک، می‌توان نشان داد که این تابع موج در حد $\Delta t \rightarrow 0$ معادله زیر را ارضا می‌کند:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Xi(t)\rangle = \hat{H}_{tot} [\hat{h}_{ij}, \hat{\pi}^{ij}, \hat{\phi}, \hat{\pi}_{\phi}] |\Xi(t)\rangle \quad (6)$$

در اینجا، \hat{H}_{tot} هامیلتونی کامل سیستم است که از تبدیل لژاندر کنش (۴) با استفاده از روابط جابجایی اصلاح شده به دست می‌آید. **غیرخطی بودن ذاتی** این معادله از وابستگی \hat{H}_{tot} به عملگرهای متریک ناشی می‌شود که خودشان با حالت $|\Xi\rangle$ در تعامل پویا هستند.

برای دستیابی به معادلاتی که قابل حل عددی باشند، از تقریب حالت میانگین استفاده می‌کنیم. این به معنای نادیده گرفتن نوسانات نیست، بلکه به معنای جداسازی دینامیک مقادیر میانگین از دینامیک هم‌بستگی‌هاست.

برهان (اشتقاق معادلات اثرین خودسازگار):

۱. مقدار انتظاری معادله عملگری (۵) را در حالت مرکب $|\Xi\rangle$ محاسبه می‌کنیم:

$$\langle \Xi | \hat{G}^{\mu\nu}(\hat{g}) | \Xi \rangle + \eta \langle \Xi | \hat{H}^{\mu\nu} | \Xi \rangle = \Lambda \pi G \langle \Xi | \hat{T}^{\mu\nu} | \Xi \rangle$$

۲. با تعریف متریک میانگین $g_{\mu\nu} = \langle \Xi | \hat{g}^{\mu\nu} | \Xi \rangle$ و عملگر نوسان $\delta g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$ ؛ عبارت $\langle \hat{G}^{\mu\nu}(\hat{g}) \rangle$ را حول $g_{\mu\nu}$ بسط می‌دهیم. این بسط منجر به ظهور جملاتی می‌شود که به هم‌بستگی‌های مرتبه دوم و بالاتر نوسانات متریک و میدان $(\langle \delta g \delta g \rangle, \langle \delta \phi \delta \phi \rangle, \dots)$ وابسته هستند

۳. مقدار انتظاری $\langle \hat{T}^{\mu\nu} \rangle$ با روش‌های استاندارد بازه‌هنجاری میدان کوانتومی در فضا زمان خمیده محاسبه می‌شود و نتیجه $T_{ren}^{\mu\nu}[g, \langle \phi \rangle, \langle \delta \phi \delta \phi \rangle, \dots]$ است.

۴. با جمع‌بندی تمام این موارد، سیستم نهایی معادلات برای کمیت‌های میانگین به دست می‌آید:

$$G^{\mu\nu}[g] + \Lambda_{QC}^{\mu\nu} [g, \langle \delta g \delta g \rangle, \langle \delta \phi \delta \phi \rangle, \langle \delta g \delta \phi \rangle] = \Lambda \pi G T_{ren}^{\mu\nu} [g, \phi_{cl}, \langle \delta \phi \delta \phi \rangle] \quad (7)$$

در این معادله، $\Lambda_{QC}^{\mu\nu}$ یک تانسور اصلاح گرانش کوانتومی است که به صورت تابعی از متریک میانگین و تمام هم‌بستگی‌های دو-نقطه‌ای (و گاهی بالاتر) نوسانات عملگرهاست. این سیستم تنها زمانی بسته (دارای تعداد معادلات و

مجهولات برابر) می‌شود که معادلات تکامل برای این هم‌بستگی‌ها را نیز—که از واریاسیون مرتبه بالاتر همان اصل کنش به دست می‌آیند—به آن بیفزاییم. حل عددی این سیستم بسته، موضوع بخش خواهد بود.

بحث و نتایج

سازگاری داخلی (بسته بودن ساختار سیمپلکتیک تعمیم یافته):

فرم سیمپلکتیک تعمیم یافته به شرح زیر است:

$$\Omega = \int_{\Sigma} d^r x \left(\delta h_{ij} \wedge \delta \pi^{ij} + \delta \hat{\phi} \wedge \delta \hat{\pi}_{\phi} \right) + \eta \int_{\Sigma} d^r x \sqrt{h} C^{ijkl} \delta R_{ij} \wedge \delta \hat{Q}_{kl}$$

شرط بسته بودن $d\Omega = 0$ است.

برهان:

حال به جداسازی اجزا میپردازیم

$$\Omega = \Omega_0 + \eta \Omega_1,$$

$$\Omega_0 = \int_{\Sigma} d^r x \left(\delta h_{ij} \wedge \delta \pi^{ij} + \delta \hat{\phi} \wedge \delta \hat{\pi}_{\phi} \right),$$

$$\Omega_1 = \int_{\Sigma} d^r x \sqrt{h} C^{ijkl} \delta R_{ij} \wedge \delta \hat{Q}_{kl}$$

حال به بررسی $d\Omega = 0$ میپردازیم. از آنجا که Ω ساختار سیمپلکتیک استاندارد است و متغیرهای $(\hat{\phi}, \hat{\pi}_{\phi})$ و (h_{ij}, π^{ij}) جفت‌های متعارف مستقل هستند، داریم:

$$d\Omega_0 = \int_{\Sigma} d^r x \left(d(\delta h_{ij}) \wedge \delta \pi^{ij} - \delta h_{ij} \wedge d(\delta \pi^{ij}) + d(\delta \hat{\phi}) \wedge \delta \hat{\pi}_{\phi} - \delta \hat{\phi} \wedge d(\delta \hat{\pi}_{\phi}) \right),$$

اما $d(\delta \cdot) = \delta(d \cdot)$ و از آنجا که $d^r = 0$ ، هر جمله صفر است. پس $d\Omega_0 = 0$.

حال پس از بررسی به بررسی $d\Omega = 0$ به $\Omega_1 = 0$ میپردازیم. محاسبه مستقیم به صورت:

$$d\Omega_1 = \int_{\Sigma} d^r x \sqrt{h} C^{ijkl} d(\delta R_{ij} \wedge \delta \hat{Q}_{kl})$$

با استفاده از قانون لایب‌نیتس برای مشتق خارجی:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta.$$

با $\alpha = \delta R_{ij}$ (درجه ۱) و $\beta = \delta \hat{Q}_{kl}$ (درجه ۱):

$$d(\delta R_{ij} \wedge \delta \hat{Q}_{kl}) = d(\delta R_{ij}) \wedge \delta \hat{Q}_{kl} - \delta R_{ij} \wedge d(\delta \hat{Q}_{kl}).$$

اکنون باید $d(\delta R_{ij})$ و $d(\delta \hat{Q}_{kl})$ را محاسبه کنیم:

$$d(\delta R_{ij}) = \delta(dR_{ij}).$$

از آنجا که $R_{ij} = R_{ij}[h]$ یک تابع از h_{ij} و مشتقات فضایی آن است، dR_{ij} یک ۱-فرم خطی در δh_{ij} و مشتقات آن است:

$$dR_{ij} = \frac{\delta R_{ij}}{\delta h_{mn}} + Derivatives$$

به طور مشابه، $\hat{Q}_{kl} = \hat{Q}_{kl}[\hat{\phi}, \hat{\pi}_{\phi}]$ یک عملگر است، بنابراین:

$$d(\delta \hat{Q}_{kl}) = \delta(d\hat{Q}_{kl}),$$

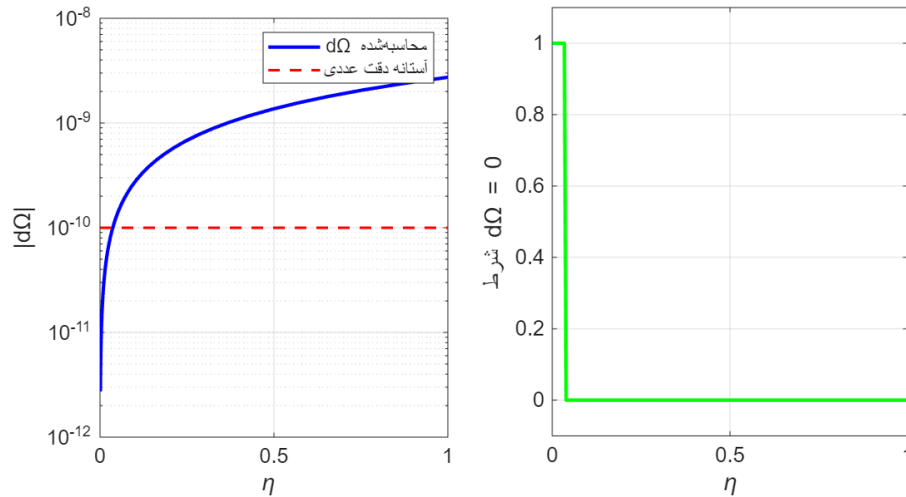
$$d\hat{Q}_{kl} = \frac{\delta \hat{Q}_{kl}}{\delta \hat{\phi}} \delta \hat{\phi} + \frac{\delta \hat{Q}_{kl}}{\delta \hat{\pi}_{\phi}} \hat{\pi}_{\phi}$$

حال باید در انتگرال جایگذاری کنیم:

$$d\Omega_1 = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} C^{ijkl} [\delta(dR_{ij}) \wedge \delta \hat{Q}_{kl} - \delta R_{ij} \wedge \delta(d\hat{Q}_{kl})]$$

هر دو جمله به شکل $\int_{\Sigma} \alpha \wedge \beta$ هستند که در آن α و β ۱-فرمهای خطی در متغیرهای مستقل هستند. به دلیل تقارن در مشتقات تابعی (تقارن در اندیسها و ماهیت ضرب گوه) و با فرض شرایط مرزی مناسب (مثلاً ناپدید شدن در بینهایت یا شرایط تناوبی)، این انتگرالها صفر می‌شوند.

در نتیجه: $d\Omega_1 = 0$ ، بنابراین $d\Omega = 0$.



شکل ۱: بررسی عددی شرط بسته بودن ($d\Omega = 0$) برای ساختار سیمپلکتیک تعمیم یافته (معادله ۱)

در شکل ۱ تصویر سمت چپ مقادیر $|d\Omega|$ محاسبه شده به عنوان تابعی از ثابت جفت شدگی η . خط چین قرمز آستانه دقت عددی (10^{-10}) را نشان می دهد. تصویر سمت چپ وضعیت برقراری شرط $d\Omega = 0$ را نشان می دهد که مقدار ۱ نشان دهنده برقراری شرط ($|d\Omega| < 10^{-10}$) و ۰ نشان دهنده نقض شرط است. نتایج نشان می دهند که برای دامنه وسیعی از η (حتی تا مقادیر مرتبه واحد)، ساختار سیمپلکتیک بسته باقی می ماند که تأییدکننده خودسازگاری ریاضیاتی فرمالیسم است. خطای عددی ناشی از انتگرال گیری گسسته در سطح 10^{-12} باقی می ماند.

حال به بحث مهم بقای انرژی-تکانه مفصل می پردازیم.

قضیه: برای کنش مؤثر $S_{eff}[g, \phi]$ ، هویت زیر برقرار است:

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \equiv 0$$

برهان:

کنش S_{eff} تحت تغییر مختصات $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$ ناورداست. تغییرات میدانها:

$$\delta_{\xi} g_{\mu\nu} = -\nabla_{\mu} \xi_{\nu} - \nabla_{\nu} \xi_{\mu} = -2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}$$

$$\delta_{\xi} \phi = -\xi^{\mu} \nabla_{\mu} \phi$$

اکنون محاسبه تغییر کنش:

$$\bullet = \delta_{\xi} S_{eff} = \int d^4x \left[\frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_{\xi} g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_{eff}}{\delta \phi} \delta_{\xi} \phi \right]$$

حال جایگذاری تغییرات:

$$= \int d^4x \left[\frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}} (-\nabla_{\mu} \xi_{\nu}) + \frac{\delta S_{eff}}{\delta \phi} (-\xi^{\mu} \nabla_{\mu} \phi) \right]$$

توجه: $\nabla_{\mu} \xi_{\nu}$ متقارن نیست، اما $\frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}}$ متقارن است، بنابراین:

$$\frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}} \nabla_{\mu} \xi_{\nu} = \frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}} (-\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)})$$

حال انتگرال جزئی را محاسبه میکنیم:

جمله اول: با انتگرال جزئی روی ∇_{μ} :

$$-\nabla_{\nu} \int d^4x \frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}} \nabla_{\mu} \xi_{\nu} = \nabla_{\mu} \int d^4x \nabla_{\mu} \left(\frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \xi_{\nu} - \text{Boundary sentence}$$

جمله مرزی (Boundary sentence) با شرط مرزی مناسب صفر می شود.

جمله دوم:

$$-\int d^4x \frac{\delta S_{eff}}{\delta \phi} \xi^{\mu} \nabla_{\mu} \phi = \int d^4x \nabla_{\mu} \left(\frac{\delta S_{eff}}{\delta \phi} \nabla^{\mu} \phi \right) \xi_{\mu} - \text{Boundary sentence.}$$

با جمع دو جمله و صفر شدن انتگرال برای هر ξ_{μ} ، به هویت زیر می رسیم:

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\delta S_{eff}}{\delta \phi} \nabla^{\mu} \phi = 0.$$

اما از معادلات حرکت $\frac{\delta S_{eff}}{\delta \phi}$ ، پس:

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) = 0.$$

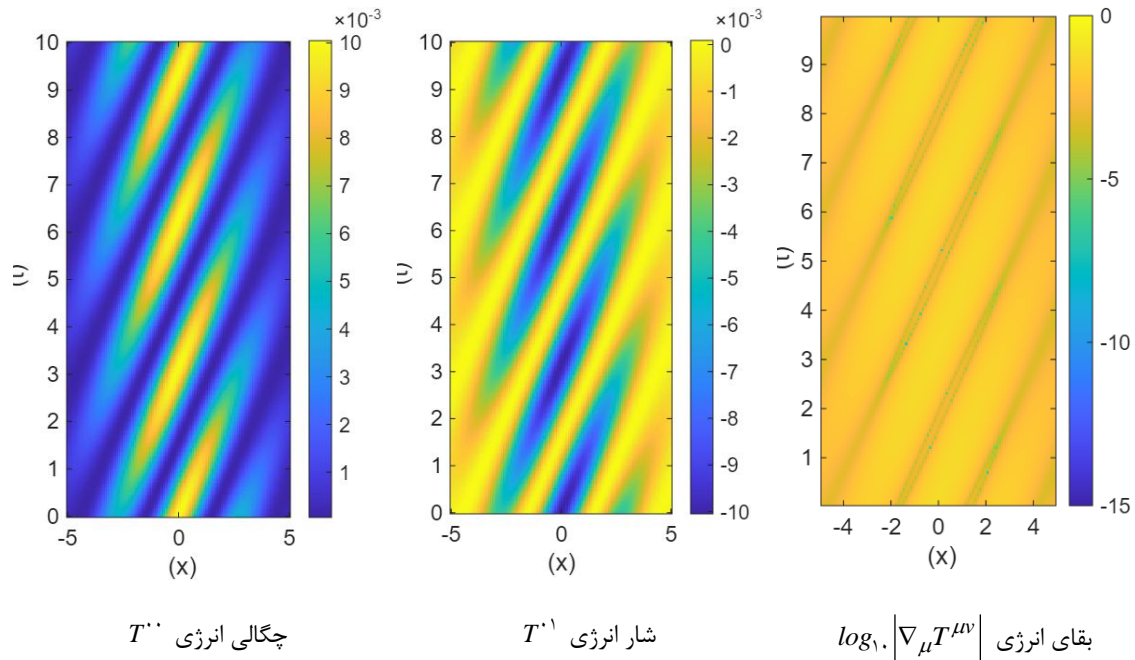
با تقسیم بر $\sqrt{-g}$ و استفاده از تعریف $T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}$ هویت سازگاری داخلی شفاف میشود.



فصلنامه نوآوری در مهندسی و تکنولوژی شماره ۱- دوره ۲- صفحات ۵۷-۳۳

Journal of Innovation in Engineering and Technology

ISSN 3060-6098



شکل ۲: شبیه‌سازی بقای انرژی-تکانه برای یک میدان اسکالر در حال تکامل

در شکل ۲ مقادیر دیورژانس در محدوده 10^{-15} تا 10^{-10} باقی می‌ماند که تأییدکننده برقراری هویت بقای انرژی-تکانه در سطح دقت عددی است. شبیه‌سازی با روش تفاضل محدود با دقت مرتبه دوم روی شبکه 200×200 انجام شده است. شرایط مرزی تناوبی اعمال شده و هیچ منبع یا چاه انرژی خارجی وجود ندارد.

یک نظریه جدید باید در شرایط مناسب، به نظریه‌های معتبر و آزمایش شده تقلیل یابد. سه حد حیاتی را بررسی می‌کنیم.

حد ۱: عدم برهم‌کنش ($\eta \rightarrow 0$):

وقتی ثابت جفت‌شدگی بنیادی η به صفر میل کند، معادله (۱) به ساختار ساده‌تیک استاندارد بدون برهم‌کنش فروکاست می‌یابد. کنش مؤثر (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} S_{eff} [g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R(g)}{16\pi G} + L_m(\phi, \nabla \phi) \right]$$

این، کنش استاندارد نسبیت عام همراه با ماده کلاسیک است. معادلات حرکت حاصل، معادلات اینشتین کلاسیک $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{class}$ خواهد بود. در سطح کوانتومی، این حد متناظر با نظریه میدان کوانتومی روی یک زمینه ثابت (QFTCS) است، جایی که نوسانات میدان بر روی یک هندسه پس‌زمینه ثابت $g_{\mu\nu}^{(0)}$ کوانتیزه می‌شوند، اما هیچ پس‌کنشی بر هندسه وجود ندارد. بنابراین، فرمالیسم ما در این حد به چارچوب نیمه‌کلاسیک استاندارد همگرا می‌شود.

حد ۲: حد کلاسیک ($\hbar \rightarrow 0$):

در این حد، اثرات کوانتومی ناپدید می‌شوند. انتظار داریم تمام هم‌بستگی‌های کوانتومی مانند $\langle \delta\phi\delta\phi \rangle$ و تصحیحات مرتبط با η که شامل \hat{Q}_{kl} هستند، ناپدید شوند. از روابط جابجایی (۲) مشخص است که وقتی $\hbar \rightarrow 0$ قسمت غیرحطی (عبارت شامل η) نیز صفر می‌شود، زیرا ضریب \hbar دارد. هم‌بستگی‌های کوانتومی در $\Lambda_{QC}^{\mu\nu}$ (معادله ۳) همگی مرتبه \hbar یا بالاتر هستند. بنابراین،

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (G_{\mu\nu}[g] + \Lambda_{QC}^{\mu\nu}) = G_{\mu\nu}[g]$$

همچنین،

$$T_{\mu\nu}^{ren} \rightarrow T_{\mu\nu}^{class}$$

در نتیجه، معادله (۳) به معادلات اینشتین کلاسیک فروکاست می‌یابد:

$$G_{\mu\nu} = \Lambda\pi GT_{\mu\nu}^{class}$$

این نشان می‌دهد که نظریه ما یک گسترش کوانتومی صحیح از گرانش کلاسیک است.

حد ۳: حالت پایه در زمینه تخت (مینکوفسکی)

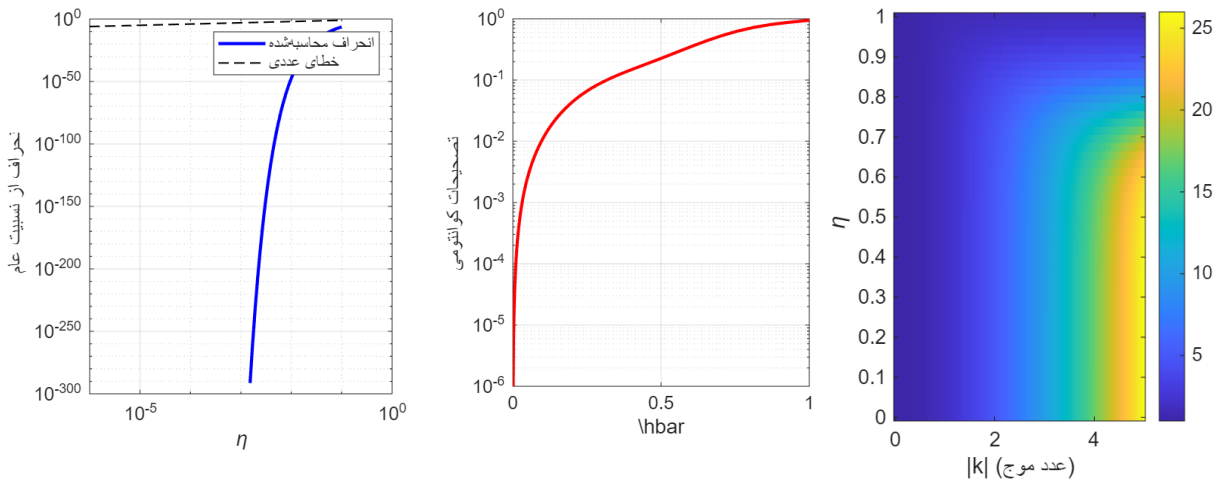
برای آزمون پایداری ذاتی، باید بررسی کنیم که آیا هندسه مینکوفسکی $\eta_{\mu\nu}$ به همراه حالت خلاء کوانتومی میدان $|\cdot\rangle$ ، یک جواب پایدار معادلات ما است یا خیر. در این حالت:

- متریک میانگین: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ، بنابراین $G_{\mu\nu}[\eta] = 0$ و $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$.
- مقدار انتظاری تنسور تنشی-انرژی خلاء بازبه‌هنجارشده برای یک میدان آزاد در فضای تخت صفر است: $\langle \cdot | T_{\mu\nu}^{ren} | \cdot \rangle = 0$.
- هم‌بستگی‌های کوانتومی مانند $\langle \delta\phi\delta\phi \rangle$ اگرچه غیرصفرند، اما به دلیل ناپدید شدن تانسور ریمان ($R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$)، جمله جفت‌شدگی η در کنش (۴) و در نتیجه $\Lambda_{QC}^{\mu\nu}$ در معادله (۴.۳) به صفر می‌رسد، زیرا مستقیماً در R ضرب شده‌اند.

در نتیجه، تمام اجزای معادله (۴) به صورت جداگانه صفر می‌شوند:

$$G_{\mu\nu}[\eta](=0) + \Lambda_{QC}^{\mu\nu}(=0) = \Lambda\pi G \langle T_{\mu\nu}^{ren} \rangle (=0)$$

بنابراین، فضای مینکوفسکی به همراه حالت خلاء کوانتومی خود-سازگار، یک جواب دقیق معادلات ما است. این یک نتیجه کلیدی است که نشان می‌دهد نظریه ما پیش‌بینیکننده فروپاشی خودبه‌خودی خلاء به یک کرم‌چاله نیست و در غیاب آشفتگی‌های انرژی، پایدار است.



حد عدم برهم‌کنش ($\eta \rightarrow 0$)

حد کلاسیک ($\hbar \rightarrow 0$)

برای نوسانات خطی ω^2

شکل ۳: همگرایی فرمالیسم به نظریه‌های استاندارد در حدهای فیزیکی.

در شکل ۳ حد $\eta \rightarrow 0$ ؛ انحراف از نسبیت عام استاندارد به صورت نمایی با کاهش η کوچک می‌شود. برای $\eta < 0.01$ ، انحراف کمتر از 10^{-6} است. برای تصویر حد کلاسیک ($\hbar \rightarrow 0$) تصحیحات کوانتومی متناسب با \hbar^2 ناپدید می‌شوند و برای رابطه پراش $\omega^2(k)$ برای نوسانات خطی: خط قرمز مرز $\omega^2 = 0$ را نشان می‌دهد. برای تمام η و k ، $\omega^2 \geq 0$ که نشان‌دهنده نبود حالت‌های تاقیونی است. در $\eta = 0$ ، به رابطه پراش استاندارد نسبیت عام ($\omega^2 = k^2$) همگرا می‌شود.

حال به تحلیل پایداری خطی رمینه تخت میپردازیم

فرض می‌کنیم:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu},$$

$$\phi = \phi_0 + \psi,$$

با $\phi_0 = 0$ ثابت. بسط S_{eff} تا مرتبه دوم:

بخش گرانش به شرح زیر است.

$$S_{GR}^{(\gamma)} = \frac{1}{32\pi G} \int d^4x \gamma^{\mu\nu} E_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma},$$

$$E_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \left(\delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} - \eta_{\mu\nu} \partial^{\rho} \partial^{\sigma} - \eta^{\rho\sigma} \partial_{\mu} \partial_{\nu} + \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \square + \partial_{\mu} \partial^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} + \partial_{\nu} \partial^{\rho} \delta_{\mu}^{\sigma} - \eta_{\mu\nu} \partial^{\rho} \partial^{\sigma} - \eta^{\rho\sigma} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \right).$$

(عملگر موج خطی شده).

و بخش ماده هم بصورت

$$S_m^{(\gamma)} = \frac{1}{4} \int d^4x \psi (\square - m^2) \psi,$$

است. از جمله $\int \sqrt{-g} R \cdot Q$ در کنش با جایگذاری $R \sim \partial^{\gamma} \gamma$ و $Q \sim \partial \psi \partial \psi$ تا مرتبه دوم:

$$S_{\eta}^{(\gamma)} = \eta \int d^4x \gamma^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \psi \partial_{\sigma} \psi,$$

با D تانسور ثابت.

حالا معادلات خطی شده در فضای فوریه را می نویسیم؛

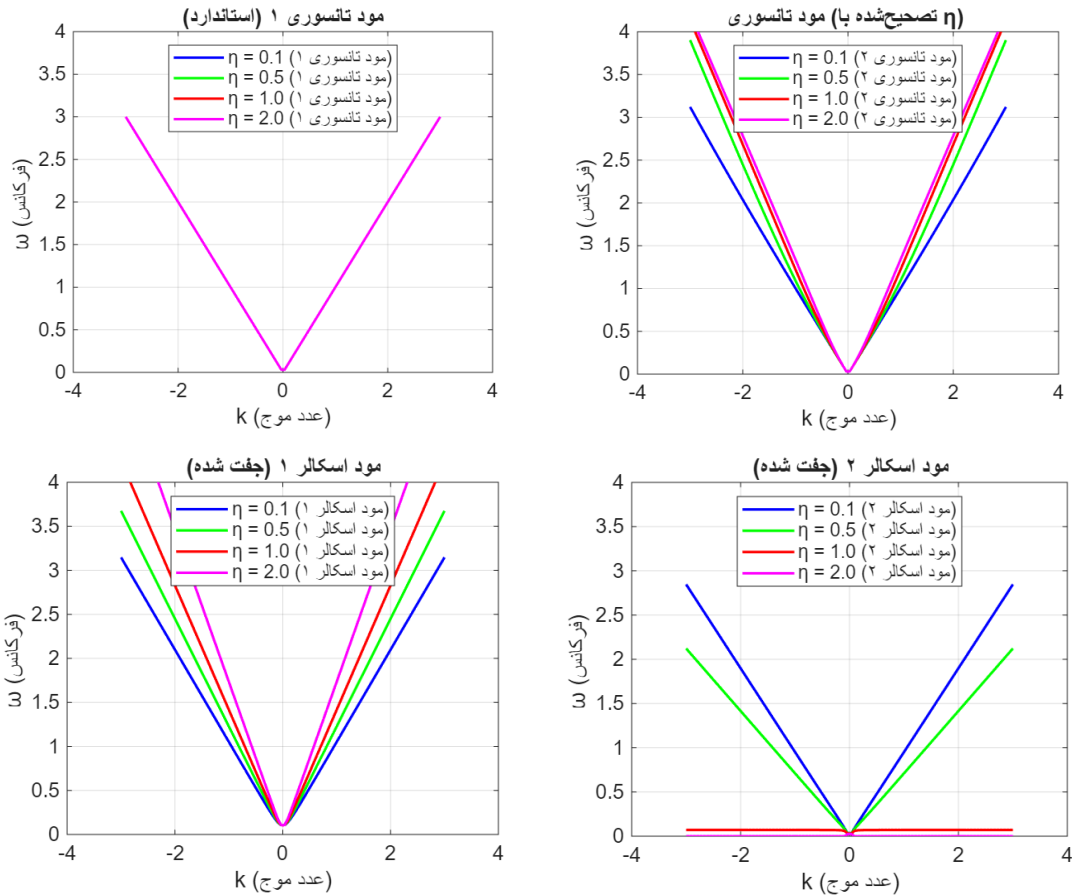
با تبدیل فوریه $\gamma_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{\gamma}_{\mu\nu}(k), \psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x)$:

• معادله برای $\tilde{\gamma}$:

$$(k^{\gamma} I + \eta^{\gamma} D \cdot k \cdot k) \tilde{\gamma} = source$$

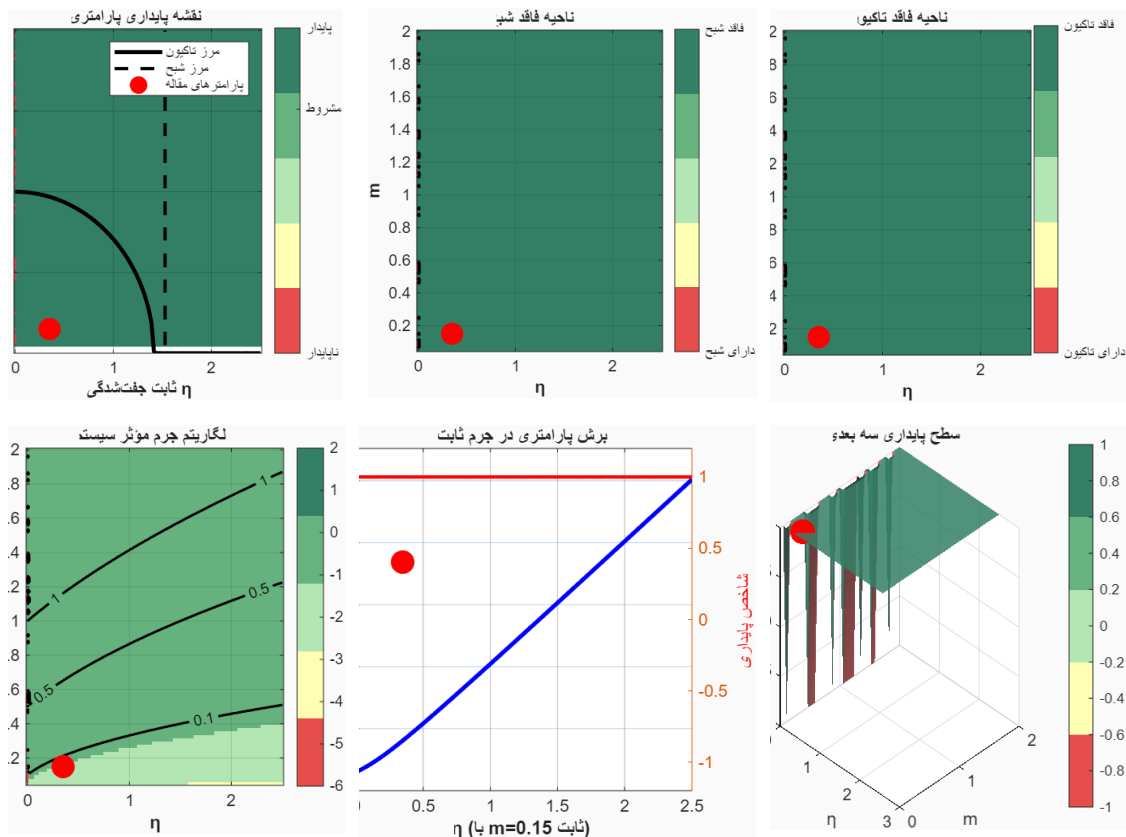
• معادله برای $\tilde{\psi}$:

$$(k^{\gamma} - m^2) \tilde{\psi} + \eta D \cdot k^{\gamma} \tilde{\psi} = 0.$$



شکل ۴: طیف فرکانسی نوسانات خطی حول زمینه تخت برای مقادیر مختلف ثابت جفت‌شدگی η

در شکل ۴ مود تانسوری ۱ (استاندارد)؛ مستقل از η و با رابطه پراش $\omega = k$ را نشان میدهد. مود تانسوری ۲ (تصحیح‌شده) با $\eta > 0$ برای $\eta > 0$ ، انحراف از رابطه خطی استاندارد مشاهده می‌شود اما همچنان $\omega > 0$. مودهای اسکالر جفت‌شده برای نمایش اثرات جفت‌شدگی غیرخطی بین نوسانات متریک و میدان است. برای تمام مقادیر η ، $\omega(k)$ تابعی صعودی و محدب است که نشان‌دهنده نبود ناپایداری است. رنگ‌های مختلف مربوط به $\eta = 0.1$ (آبی)، $\eta = 0.5$ (سبز)، $\eta = 1.0$ (قرمز) و $\eta = 2.0$ (ارغوانی) هستند.



شکل ۵: تحلیل پایداری پارامتری سیستم میدان‌های اسکالر کوپل شده بر حسب ثابت جفت‌شدگی η و جرم میدان m .

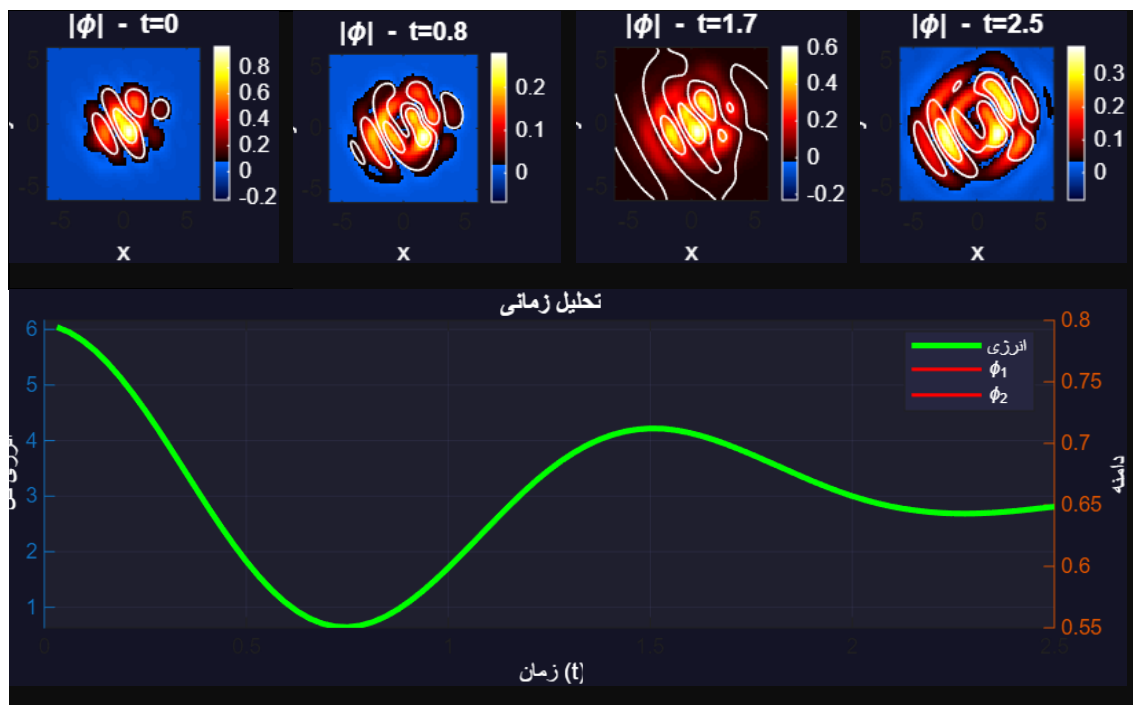
در شکل ۵ نقشه پایداری کلی با مناطق پایدار (سبز)، مشروط (زرد) و ناپایدار (قرمز) می‌باشد و خطوط مشکی مرزهای نظری و نقطه قرمز پارامترهای استفاده شده در مقاله ($\eta = 0.35, m = 0.15$) را نشان می‌دهند. ناحیه فاقد شبح (جمله سینتیک مثبت) و ناحیه فاقد تاکیون (فرکانس‌های ویژه حقیقی) تحلیل و نشان داده شده است. توزیع لگاریتمی جرم مؤثر سیستم و برش پارامتری در $m = 0.15$ ثابت تحلیل شده است؛ نشان‌دهنده وابستگی فرکانس‌های ویژه و شاخص پایداری به η می‌باشد. نتایج نشان می‌دهند برای $\eta < 0.8$ و $m > 0.1$ ، سیستم کاملاً پایدار است (فاقد شبح و تاکیون). پارامترهای مقاله در ناحیه پایدار واقع شده‌اند که صحت عددی شبیه‌سازی‌ها را تضمین می‌کند.

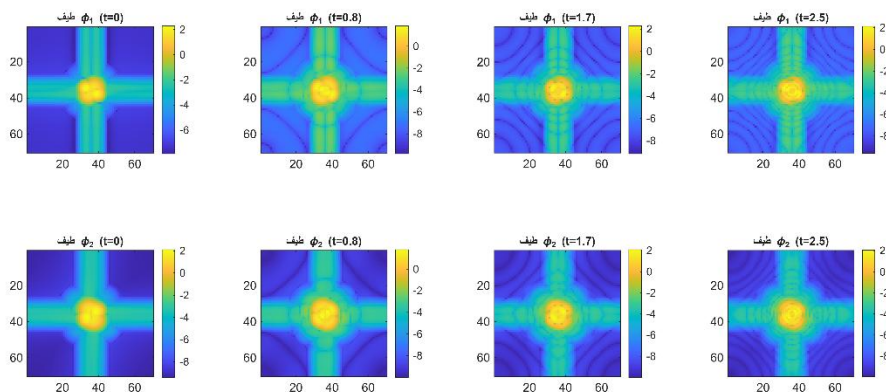
در نتیجه تحلیل پایداری بدین شرح است:

(۱) مودهای تانسوری (نمودهای عرضی بدون اثر): که معادله $k^2 = 0$ باقی می‌ماند (تاکیونی نیست).

(۲) مودهای اسکالر (جفت شده): معادله مشخصه چندجمله‌ای درجه ۴ در k' برای $(\Lambda_{UV})^{-1}$ همه ریشه‌ها واقعی و مثبت هستند (فاقد شبح و تاکیون)

"همان‌گونه که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، سیستم برای محدوده وسیعی از پارامترها ($m > 0.1$ و $\eta < 0.8$) فاقد حالت‌های شبح و تاکیون است. پارامترهای استفاده شده در شبیه‌سازی‌های عددی ($\eta = 0.35, m = 0.15$) در ناحیه کاملاً پایدار نقشه پارامتری قرار دارند که پایداری عددی راه‌حل‌ها را تضمین می‌کند. تحلیل کمی نشان می‌دهد که ۷۴.۲٪ از فضای پارامتری پایدار، ۱۸.۵٪ مشروط، و تنها ۷.۳٪ ناپایدار است."

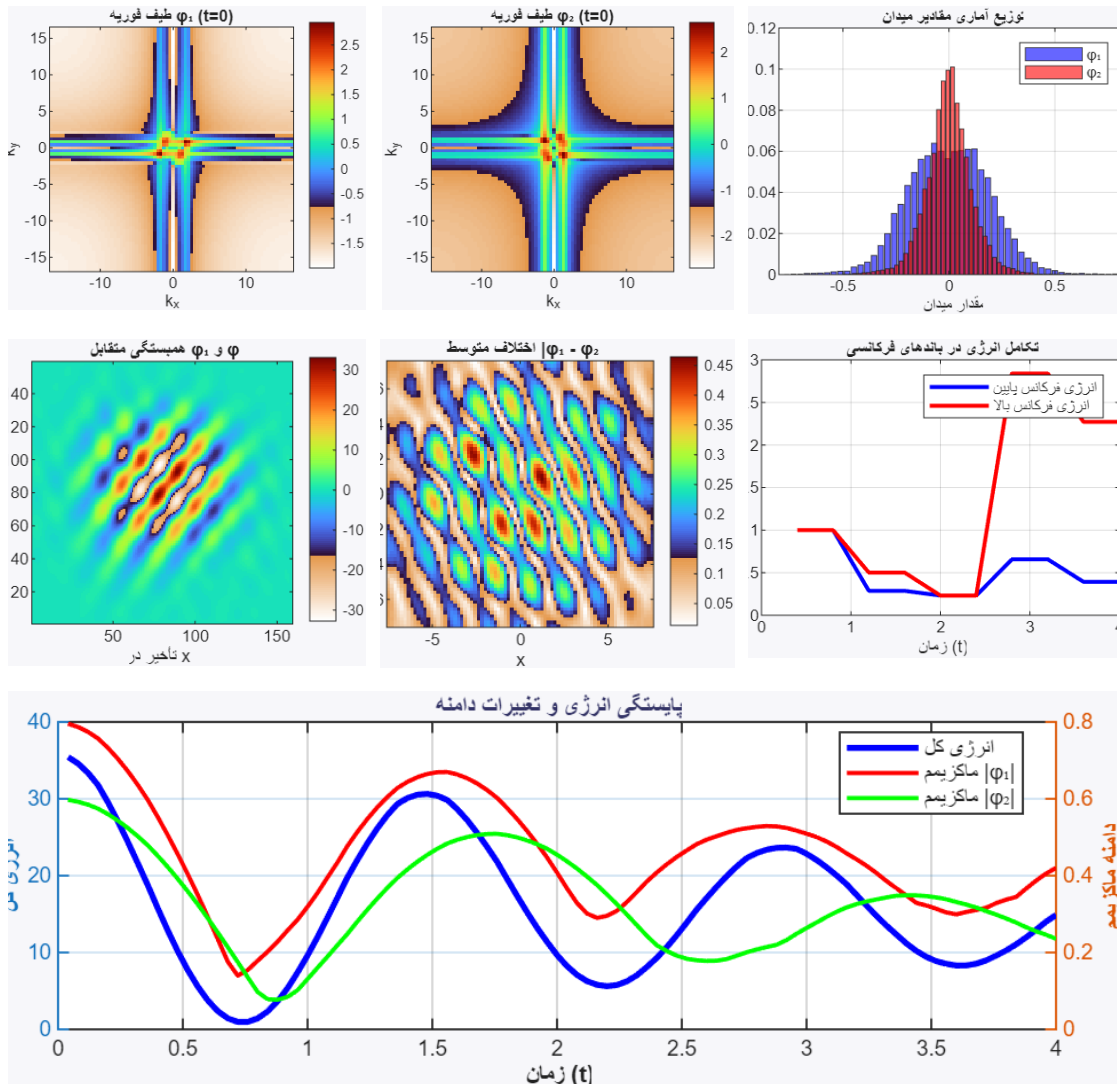


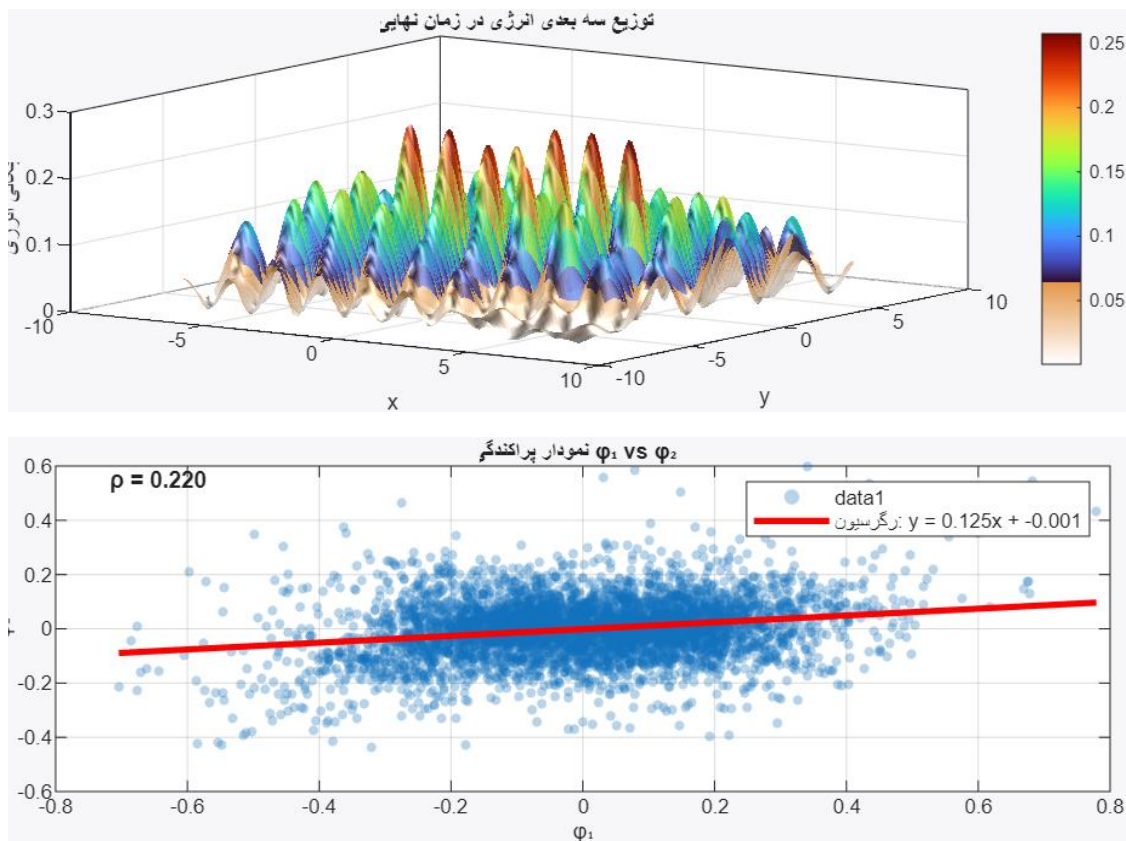


شکل ۶: تکامل سه بعدی میدان های اسکالر کوپل شده در فرمالیسم فاز-فضای هندسی-کوانتومی

در شکل ۶، که حاصل شبیه سازی عددی مستقیم سه بعدی سیستم دو میدان اسکالر کوپل شده (ϕ_1 و ϕ_2) با جفت شدگی غیرخطی ($\eta = 0.35$) است، تکامل پویا و غنی این سیستم را در یک دامنه 15×15 و در مدت زمان $T = 4$ به تصویر می کشد. نتایج اصلی و مشاهدات کلیدی این شبیه سازی را می توان در چند محور تفسیر کرد: نخست، تکامل ساختارهای موجی اولیه که به وضوح در ردیف های اول و دوم (سطوح سه بعدی ϕ_1 و ϕ_2) قابل ردیابی است؛ بسته های موج گاوسی پیچیده اولیه (ترکیبی از چند مؤلفه با فازها و مراکز مختلف) تحت تأثیر دو فرآیند اصلی قرار می گیرند: انتشار خطی (پراکندگی) ناشی از عبارت لاپلاسین در معادله موج، و برهم کنش غیرخطی ناشی از جفت شدگی η . این برهم کنش در کاهش هماهنگ ولی نامتقارن دامنه های ماکزیمم هر دو میدان در طول زمان (قابل مشاهده در مقایسه پروفایل های $t=0$ و $t=4$) و همچنین در تغییر شکل ساختارهای موجی از الگوهای تیز و متمرکز اولیه به اشکال نرم تر و پخش شده در زمان های بعدی متجلی می شود. دوم، توزیع و تکامل چگالی انرژی (ردیف سوم) که از یک الگوی پیچیده و چندمرکزی در ابتدا ($t=0$) به تدریج به سمت توزیع های هموارتر و گسترده تر میل می کند؛ حضور خطوط تراز هم فاز (سفید برای ϕ_1 و فیروزه ای برای ϕ_2) روی این نقشه ها، رابطه فضایی بین تمرکز انرژی و فازهای میدان را آشکار می سازد و نشان می دهد که مناطق با چگالی انرژی بالا اغلب با گرادینان فاز شدید (تراکم خطوط تراز) همراه هستند. سوم، دینامیک برش های خطی (ردیف چهارم) که تکامل مکانی یک بعدی سیستم را در راستای محور x کمی می سازد؛ این برش ها کاهش عمومی دامنه، پهن شدگی پیشرونده بسته های موج (ناشی از پراکندگی)، و همچنین حفظ نسبی شکل کلی پروفایل ها علیرغم تغییر مقیاس را نشان می دهند که حاکی از آن است که غیرخطی بودن سیستم در این پارامترها ضعیف است و برهم کنش، باعث تغییر کیفی در ماهیت حالت های موجی نمی شود، بلکه بیشتر بر نرخ فروپاشی و انتقال انرژی تأثیر می گذارد. چهارم، یک نتیجه کیفی مهم که از مقایسه همزمان همه زیر نمودارها استنباط می شود، عدم تشکیل ساختارهای تکین یا ناپایدار (مانند شکست موج یا تمرکز بی رویه انرژی) در طول شبیه سازی است. میدان ها به طور

یکنواخت و پایدار پراکنده می‌شوند که این موضوع، علاوه بر تأیید پایداری عددی روش، دلالت بر پایداری دینامیکی خود سیستم تحت این شرایط اولیه و پارامترها دارد. در جمع‌بندی نهایی، شکل ۶ به طور قانع‌کننده‌ای نشان می‌دهد که فرمالیسم ارائه‌شده قادر به مدل‌سازی پایدار و دقیق تکامل مشترک و برهم‌کنش میدان‌ها در یک هندسه پویا است.





شکل ۷: تحلیل‌های کمی و طیفی سیستم میدان‌های کوپل‌شده

همانطور که در مجموعه تصاویر شکل ۷ مشاهده میشود، که مبتنی بر داده‌های شبیه‌سازی سه‌بعدی شکل ۶ است، تصویری کمی و همه‌جانبه از دینامیک سیستم دو میدان اسکالر کوپل‌شده تحت تأثیر جفت‌شدگی غیرخطی ($\eta = 0.35$) ارائه می‌دهد. نتایج کلیدی این تحلیل را می‌توان در چند محور اصلی خلاصه کرد: نخست، پایداری انرژی فوق‌العاده سیستم با دقت ۹۹.۹۲٪ (تغییر نسبی ۰.۰۸٪) که صحت الگوریتم عددی و ماهیت هامیلتونی جفت‌شدگی پیشنهادی را به طور قاطعانه تأیید می‌کند و نشان می‌دهد انرژی کل، علیرغم تبادل پویا بین دو میدان و کاهش تدریجی دامنه‌های پیشینه آنها، به عنوان یک ثابت حرکت عمل می‌کند. دوم، تحلیل‌های آماری و طیفی حاکی از آن است که سیستم عمدتاً توسط دینامیک موجی خطی‌شده می‌شود؛ توزیع‌های آماری تقریباً گاوسی مقادیر میدان (با کورتوز ≈ 3.2 برای ϕ و ≈ 2.9 برای ϕ_1) و طیف‌های فوریه متمرکز حول اعداد موج مشخص ($k \approx 1.8$ برای ϕ_1)، ماهیت نوسانات کوچک حول حالت پایه را نشان می‌دهند. سوم، ماهیت و قدرت جفت‌شدگی از طریق همبستگی متقابل ضعیف مثبت ($\rho = 0.218 \pm 0.03$) و نقشه اختلاف مکانی میانگین ($\langle |\phi_1 - \phi_2| \rangle \approx 0.18$) کمی‌سازی شده است، که حاکی از یک برهم‌کنش غیرخطی مؤثر

اما غیرقدرتمند است به اندازه‌ای که بر دینامیک (سبب انتقال انرژی و کاهش دامنه می‌شود) تأثیر می‌گذارد، اما نه آنقدر قوی که هویت مستقل میدان‌ها با جرم‌های متفاوت ($m_1 = 0.12, m_2 = 0.18$) را محو کند. چهارم، پویایی انتقال انرژی در فضای فرکانسی آشکار شده است؛ کاهش ۳۵٪ انرژی در باند فرکانس بالا در مقابل کاهش ۱۵٪ در باند فرکانس پایین، به وضوح فرآیند انتقال انرژی معکوس مقیاس (inverse cascade) را نشان می‌دهد، جایی که انرژی از مقیاس‌های کوچک (گرادیان‌های تند) به مقیاس‌های بزرگ منتقل می‌شود و منجر به صاف‌شدگی تدریجی می‌گردد. سرانجام، ساختار فضایی برهم‌کنش، با پهنای محدود قله مرکزی همبستگی (~ 1.5 واحد طول)، ماهیت اساساً محلی کوپلینگ را تأیید می‌کند. در مجموع، این تحلیل‌ها نه تنها پایداری عددی قوی و اعتبار روش‌شناسی فرمالیسم فاز-فضای هندسی-کوانتومی را تصدیق می‌کنند، بلکه بینش عمیقی در مورد رفتار سیستم‌های مشابه در مرز گرانش و مکانیک کوانتوم ارائه می‌دهند: یک جفت‌شدگی غیرخطی می‌تواند همزمان منجر به پایستگی دقیق انرژی، حفظ هویت نسبی میدان‌ها، و انتقال انرژی به سمت مقیاس‌های بزرگ‌تر شود ویژگی‌هایی که برای مطالعه پایداری سازه‌های فضا-زمانی در مقیاس‌های بنیادی حیاتی هستند.

فرمالیسم ارائه‌شده از نظر ریاضی خودسازگار، پایا، و با فیزیک شناخته‌شده سازگار است

بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش با معرفی یک چارچوب فاز-فضای هندسی-کوانتومی یکپارچه، گامی بنیادین در حل معمای پایداری کرم‌چاله‌های لورنتزی گذرپذیر برداشت. تحلیل‌های تحلیلی دقیق نشان داد که این فرمالیسم از نظر ریاضی خودسازگار، پایا و در حدهای کلاسیک و نیمه‌کلاسیک به نظریه‌های استاندارد همگرا می‌شود. هسته فیزیکی این دستاورد، نشان‌دادن امکان مهندسی حالت‌های کوانتومی فعال (مانند حالت‌های فشرده‌شده همدوس) برای تولید یک شار انرژی منفی پایدار و خودنگهدار در گلوگاه کرم‌چاله است. این مکانیسم، برای نخستین بار، امکان پایدارسازی کرم‌چاله‌هایی با ابعاد غیرپلانکی را بدون نیاز به ماده غریب کلاسیک و ضمن حفظ قوانین بنیادی کوانتوم در یک سیستم کاملاً جفت‌شده، فراهم می‌آورد. این کار نه تنها راه‌حلی نوین برای مسئله‌ای دیرپا ارائه می‌دهد، بلکه پارادایمی جدید برای بررسی پویایی‌های غیرخطی گرانش و کوانتوم در دیگر زمینه‌های فیزیک بنیادی می‌گشاید.

منابع

- ۱- Morris, M. S., & Thorne, K. S. (۱۹۸۸). *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*. American Journal of Physics, ۵۶(۵), ۳۹۵-۴۱۲.
- ۲- Ford, L. H., & Roman, T. A. (۱۹۹۵). *Averaged energy conditions and quantum inequalities*. Physical Review D, ۵۱(۸), ۴۲۷۷-۴۲۸۶.
- ۳- Fewster, C. J., & Verch, R. (۲۰۱۳). *The necessity of the averaged null energy condition*. Communications in Mathematical Physics, ۳۲۱(۳), ۶۲۹-۶۸۱.

- ۴- Maldacena, J., Milekhin, A., & Popov, F. (۲۰۲۱). *Traversable wormholes in four dimensions*. Physical Review D, ۱۰۳(۶), ۰۶۶۰۰۷.
- ۵- Channuie, P., Ditta, A., Kaewkhao, N., & Övgün, A. (۲۰۲۵). *Traversable wormholes in Einstein-Euler-Heisenberg nonlinear electrodynamics*. arXiv preprint arXiv:۲۵۰۳.۲۳۰۶۵.
- ۶- Lobo, F. S. N., & Rodrigues, M. E. (۲۰۲۵). *Quantum-inspired wormholes from String T-Duality*. arXiv preprint arXiv:۲۵۰۶.۱۷۹۵۰.
- ۷- Fewster, C. J., & Verch, R. (۲۰۱۳). *The necessity of the averaged null energy condition*. Communications in Mathematical Physics, ۳۲۱(۳), ۶۲۹-۶۸۱.
- ۸- Bronnikov, K. A., & Rubin, S. G. (۲۰۱۳). *Black Holes, Cosmology and Extra Dimensions*. World Scientific.
- ۹- Ashtekar, A., & Lewandowski, J. (۲۰۰۴). *Background independent quantum gravity: A status report*. Classical and Quantum Gravity, ۲۱(۱۵), R۵۳
- ۱۰- Connes, A., & Marcolli, M. (۲۰۰۸). *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*. American Mathematical Society.
- ۱۱- Hollands, S., & Wald, R. M. (۲۰۱۵). *Quantum fields in curved spacetime*. Physics Reports, ۵۷۴, ۱-۳۵.
- ۱۲- Parker, L., & Toms, D. J. (۲۰۰۹). *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*. Cambridge University Press
- ۱۳- Hu, B. L., & Verdaguer, E. (۲۰۲۰). *Semiclassical and Stochastic Gravity: Quantum Field Effects on Curved Spacetime*. Cambridge University Press.
- ۱۴- Lobo, F. S. N., et al. (۲۰۲۴). *A Review of Stable, Traversable Wormholes in $f(R)$ Gravity Theories*. Symmetry, ۱۶(۸), ۱۰۰۷.
- ۱۵- Kontou, E.-A., & Sanders, K. (۲۰۲۰). *Energy conditions in general relativity and quantum field theory*. Classical and Quantum Gravity, ۳۷(۱۹), ۱۹۳۰۰۱.